Impartial Games and Misère Play

Alessio Di Prisa

June 2021

Abstract

In questo seminario ci concentreremo sullo studio di *giochi combinatori imparziali* sotto opportune ipotesi di finitezza. In primo luogo considereremo giochi in *normal play*, per i quali dimostreremo il teorema di Sprague-Grundy, che fornisce solide basi per lo studio dei giochi normal play, e il teorema di periodicità di Guy-Smith.
Vedremo poi come la stessa costruzione sia poco efficace per i giochi in *misère play* e in che modo possa essere adattata per ottenere comunque risultati analoghi, come un teorema di periodicità misère.

1 Giochi imparziali

Definizione 1.1. Un *gioco combinatorio* è un gioco

- a due giocatori,
- ad informazione perfetta, ovvero i giocatori conoscono tutte le possibili configuarazioni di gioco,
- deterministico, ovvero ogni mossa di un giocatore determina la nuova configurazione del gioco, senza elementi casuali (i.e. lancio di dadi).

Assumeremo sempre che i giochi combinatori siano:

- *finiti*, ovvero data la posizione iniziale del gioco, esiste un numero finito di configurazioni raggiungibili tramite le mosse dei giocatori,
- *loopfree*, ovvero nessuna configurazione del gioco può essere raggiunta due volte durante la partita,
- *imparziali*, ovvero i due giocatori hanno a disposizione lo stesso insieme di mosse.

Nel seguito ci riferiremo con il termine *gioco* ad una posizione specifica G di un gioco combinatorio imparziale, mentre un gioco combinatorio, sarà anche detto *sistema di regole* Γ.

Un gioco G può essere rappresentato come $G = \{G_1, \ldots, G_m\}$, dove G_i sono le *opzioni* di G, ovvero le posizioni raggiungibili da G tramite una mossa di un giocatore.
Un altro modo di rappresentare G è con un albero in cui:

- ogni vertice v rappresenta una posizione raggiungibile da G,
- ogni arco $v \longrightarrow w$ rappresenta una mossa possibile.

Dunque le foglie dell'albero corrispondono alle posizioni finali del gioco, nelle quali non sono disponibili mosse e la partita termina.

Definizione 1.2. L'altezza dell'albero associato ad un gioco G è detto *birthday* di G, che indichiamo con $\mathrm{b}(G)$.

Ci interesseremo a studiare due tipi di *condizioni di vittoria* per un gioco:

- **Normal play**: l'ultimo giocatore a fare una mossa vince,
- **Misère play**: l'ultimo giocatore a fare una mossa perde.

Vediamo subito un esempio importante di gioco combinatorio.

Esempio 1.3. Il gioco combinatorio **Nim** è giocato con un certo numero di pile di elementi di lunghezza arbitraria. Ad ogni turno un giocatore nel suo turno rimuove un qualunque numero di elementi (almeno uno) da un'unica pila.

Indichiamo con $*n$ il gioco dato una pila di lunghezza n di Nim. Osserviamo che $*n = \{0, *, \ldots, *(n-1)\}$, dove 0 e $*$ sono notazioni abbreviate per $*0$ e $*1$ rispettivamente.
Vediamo per esempio l'albero che rappresenta $G = *3$:

$$\begin{tikzcd}
 & & *3 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
 & *2 \arrow[dl] \arrow[d] & * \arrow[d] & 0 \\
* \arrow[d] & 0 & 0 & \\
0 & & &
\end{tikzcd}$$

Esempio 1.4. Una posizione del gioco **Kayles** è data, come per Nim, da un certo numero di pile di elementi. Ad ogni turno è possibile rimuovere uno o due elementi da una singola pila. Un giocatore può, a differenza di Nim, decidere di rimuovere gli elementi, se adiacenti, dal centro della pila, separandola in due.

Esempio 1.5. Un altro esempio di gioco molto studiato è **Dawson's Kayles**: questo gioco è identico a Kayles, con l'unica differenza che è necessario rimuovere esattamente due elementi.

Definizione 1.6. Due giochi G e H si dicono *isomorfi* se sono rappresentati da alberi isomorfi. In tal caso scriviamo $G \cong H$.

Definizione 1.7. Sia G un gioco. Definiamo il *normal outcome* $o^+(G)$ come:

- $o^+(G) = \mathcal{P}$ se il secondo giocatore che muove su G ha una strategia vincente (in normal play)
- $o^+(G) = \mathscr{N}$ se il primo giocatore che muove su G ha una strategia vincente (in normal play).

Analogamente definiamo il *misère outcome* $o^-(G)$ come:

- $o^-(G) = \mathcal{P}$ se il secondo giocatore che muove su G ha una strategia vincente (in misère play)
- $o^-(G) = \mathscr{N}$ se il primo giocatore che muove su G ha una strategia vincente (in misère play).

Osserviamo che, considerando solo giochi finiti, gli outcome sono ben definiti, poiché valgono le seguenti formule ricorsive:

$$o^+(G) = \mathscr{P} \iff o^+(G') = \mathscr{N} \text{ per ogni opzione } G' \text{ di } G$$

$$o^-(G) = \mathscr{P} \iff G \neq 0 \text{ e } o^-(G') = \mathscr{N} \text{ per ogni opzione } G' \text{ di } G.$$

Le due formule sono simili, con l'unica differenza che nel caso del misère outcome abbiamo la condizione $G \neq 0$, che come vedremo complica notevolmente lo studio.

Il nostro obbiettivo è, dato un gioco G, calcolare efficientemente una strategia vincente per uno dei giocatori, o equivalentemente determinare l'outcome del gioco e delle sue sottoposizioni.

Esempio 1.8. Calcoliamo l'outcome di $*n$. In normal play abbiamo

- $o^+(0) = \mathscr{P}$
- $o^+(*n) = \mathscr{N}$ per $n > 0$ (la strategia vincente è rimuovere tutta la pila).

In misère play abbiamo invece:

- $o^-(0) = \mathscr{N}$,
- $o^-(*1) = \mathscr{P}$ (chi gioca è costretto a rimuovere tutta la pila),

- $o^-(*n) = \mathscr{N}$ per $n > 1$ (la strategia vincente è rimuovere tutti gli elementi eccetto uno).

Definizione 1.9. Siano G e H due giochi. Definiamo la *somma* $G + H$ come il gioco ottenuto ricorsivamente da

- $G + 0 = G$,
- $0 + H = H$,
- $G + H = \{G' + H,\, G' \text{ opzione di } G\} \cup \{G + H',\, H' \text{ opzione di } H\}$.

In altre parole $G + H$ si ottiene considerando una copia di G e una di H e muovendo a turno su esattamente una delle due componenti. È immediato quindi che la somma appena definita sia associativa.

Esempio 1.10. Il gioco di Nim G dato da n pile di lughezze $a_1, \ldots, a_n$ si ottiene come $G = *a_1 + \cdots + *a_n$.

Quello che andremo a fare nel seguito è decomporre un gioco come somma di giochi più semplici, in modo da poter analizzare le singole componenti e ricomporre l'outcome del gioco di partenza.

2 Normal play

In questa sezione ci interessiamo allo studio dei giochi imparziali in normal play, andando a dimostrare il *Teorema di Sprague-Grundy* e il *Teorema di periodicità di Guy-Smith*.

Definizione 2.1. Due giochi G e H si dicono *uguali*, $G = H$ se per ogni altro gioco X si ha $o^+(G + X) = o^+(H + X)$.

In altre parole, consideriamo "uguali" due giochi G e H che si comportano esattamente nello stesso modo come componenti di una somma qualunque.
Osserviamo subito che se $G \cong H$ allora $G = H$, ma il viceversa non è vero in generale.
Inoltre è immediato che l'uguaglianza appena definita sia una relazione di equivalenza.

Lemma 2.2. *Per ogni gioco G vale $G + G = 0$.*

Proof. Sia X un gioco qualunque, se $o^+(X) = \mathscr{P}$ allora il secondo giocatore vince $G + G + X$ con la seguente strategia: se il primo giocatore muove su X, è sufficiente rispondere seguendo la strategia vincente su X; se invece muove su G il secondo copia la mossa fatta sull'altro G. In questo modo il secondo giocatore riesce sempre ad avere l'ultima mossa su X, dove segue strategia vincente e lo stesso su $G + G$ per simmetria, dunque $o^+(G + G + X) = \mathscr{P}$.
Se invece $o^+(X) = \mathscr{N}$ allora è sufficiente che il primo giocatore segua la strategia vincente su X, in questo modo ci siamo ricondotti al caso precedente, quindi $o^+(G + G + X) = \mathscr{N}$. $\square$

Proposizione 2.3. *Siano $G.H, K$ giochi, con $G = H$. Allora $G + K = H + K$.*

Proof. Per ogni gioco X abbiamo $o^+((G + K) + X) = o^+(G + (K + X)) = o^+(H + (K + X)) = o^+((H + K) + X)$, da cui $G + K = H + K$. $\square$

Proposizione 2.4. *Siano G, H giochi, allora sono equivalenti:*

1. $G = H$,
2. $o^+(G + H) = \mathscr{P}$.

Proof. $(1 \Rightarrow 2)$: Poiché $G = H$ abbiamo $G + G = G + H$, da cui $\mathscr{P} = o^+(0) = o^+(G + G) = o^+(G + H)$.
$(2 \Rightarrow 1)$: Sia X un gioco qualunque. Analogamente a prima abbiamo

- se $o^+(X) = \mathscr{P}$ allora il secondo giocatore vince rispondendo con la strategia vincence su X o su $G + H$, a seconda di dove gioca il primo,
- se $o^+(X) = \mathscr{N}$ allora la strategia vincente del primo giocatore è di giocare su X, ottenendo quindi il caso precedente.

Dunque $o^+(X) = o^+(G + H + X)$ per ogni X, quindi $G + H = 0$, da cui $G = G + (H + H) = (G + H) + H = H$. $\square$

Proposizione 2.5. *Siano $G = \{G_1, \ldots, G_k\}$ e $G_1 = H$. Allora se $G' = \{H, G_2, \ldots, G_k\}$ si ha $G = G'$.*

Proof. Mostriamo che $o^+(G + X) = o^+(\widetilde{G} + X)$ per induzione su $\mathrm{b}(X)$.
Per $X = 0$ abbiamo che le opzioni di G e $\widetilde{G}$ hanno gli stessi outocome per ipotesi, dunque $o^+(G) = o^+(G')$.
In generale abbiamo che:

$$G + X = \{G_i + X\}_{i=1}^n \cup \{G + X' \mid X' \in X\}$$

$$G' + X = \{G_i + X\}_{i=2}^n \cup \{H + X\} \cup \{\widetilde{G} + X \mid X' \in X\}.$$

Per ipotesi induttiva sappiamo che $o^+(G + X') = o^+(\widetilde{G} + X')$ per ogni $X' \in X$, dunque concludiamo che $o^+(G + X) = o^+(\widetilde{G} + X)$, dato che le opzioni hanno gli stessi outcome. $\square$

Definizione 2.6. Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ un sottoinsieme finito non vuoto. Definiamo il *minimo escluso* si S come $\mathrm{mex}(S) = \min\{n : n \notin \mathbb{N}\}$.

Teorema 2.7. *Sia $G = \{*a_1, \ldots, *a_k\}$ e $m = \mathrm{mex}(a_1, \ldots, a_k)$. Allora $G = *m$.*

Proof. Mostriamo che $o^+(G + *m) = \mathscr{P}$. Supponiamo il primo giocatore muova in G, allora abbiamo $*a + *m$ per qualche $a \in \{a_1, \ldots, a_k\}$, quindi $a \neq m$. A questo punto il secondo giocatore può muovere in modo da ottenere $*m + *m$ (se $a > m$) oppure $*a + *a$ (se $a < m$), lasciando in entrambi i casi il primo giocatore costretto a muovere da una posizione con outcome $\mathscr{P}$.
Supponiamo invece il primo giocatore muova in $*m$, allora poiché $m = \mathrm{mex}(a_1, \ldots, a_k)$ abbiamo una posizione della forma $G + *a$ per qualche $a \in \{a_1, \ldots, a_k\}$. Dunque il secondo giocatore può muovere in modo da ottenere $*a + *a$, vincendo. $\square$

Teorema 2.8. *Sia G un gioco imparziale, allora $G = *m$ per qualche m.*

Proof. Procediamo per induzione su $\mathrm{b}(G)$. Se $\mathrm{b}(G) = 0$ allora $G = 0 = *0$.
Sia ora $G = \{G_1, \dots, G_k\}$, allora per ipotesi induttiva $G_i = *a_i$ per qualche $a_i \in \mathbb{N}$. Per il lemma di sostituzione e la mex rule, se $m = \mathrm{mex}(a_1, \dots, a_k)$ allora $G = \{*a_1, \dots, *a_k\} = *m$. □

Definizione 2.9. Dato $n \in \mathbb{N}$ scriviamo questo in notazione binaria come $n = \sum_{i\geq 0} \varepsilon_i 2^i$, con $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $\varepsilon_i \neq 0$ per finiti i. Allora la bigezione

$$\mathbb{N} \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$n \longrightarrow (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$$

induce su $\mathbb{N}$ una struttura di gruppo abeliano, che denotiamo con $(\mathbb{N}, \oplus)$.

Proposizione 2.10. *Siano $a, b, c \in \mathbb{N}$, allora $o^+(*a + *b + *c) = \mathscr{P}$ se e solo se $a \oplus b \oplus c = 0$.*

Proof. Dimostriamo la proposizione per induzione sulla somma $a + b + c$.
Se $a + b + c = 0$ allora $a = b = c = 0$ e la tesi è banalmente vera.
Sia allora $a \oplus b \oplus c = 0$. Se due tra a, b, c sono nulli abbiamo che anche il terzo deve esserlo, quindi $*a + *b + *c = 0$ e abbiamo concluso. Altrimenti almeno due degli interi sono non nulli. Senza perdita di generalità supponiamo il primo giocatore muova su $*a$, ottenendo $*a' + *b + *c$, allora necessariamente $a' \oplus b \oplus c \neq 0$, quindi per ipotesi induttiva $o^+(*a' + *b + *c) = \mathscr{N}$ e dunque $o^+(*a + *b + *c) = \mathscr{P}$.
Viceversa sia $a \oplus b \oplus c = d \neq 0$ e sia $d = 2^k + \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i 2^i$. Allora almeno uno tra a, b, c deve avere k-esima cifra in binario uguale a 1. Senza perdita di generalità sia questo a. Allora $a' = a \oplus d$ è minore di a, dunque il primo giocatore può muovere ottenendo $*a' + *b + *c$, con $a' \oplus b \oplus c = 0$. Per ipotesi induttiva $o^+(*a' + *b + *c) = \mathscr{P}$, dunque $o^+(*a + *b + *c) = \mathscr{N}$. □

Corollario 2.11. *Per ogni $a, b \in \mathbb{N}$ si ha $*a + *b = *(a \oplus b)$.*

Proof. Infatti poiché $a \oplus b \oplus (a \oplus b) = 0$ si ha $o^+(*a + *b + *(a \oplus b) = 0)$ dunque $*a + *b = *(a \oplus b)$. □

Abbiamo allora dimostrato il seguente:

Teorema 2.12. ***(Sprague-Grundy)*** *L'insieme dei giochi imparziali modulo uguaglianza, con l'operazione di somma tra giochi è un gruppo abeliano, con identità 0 e naturalmente isomorfo a $(\mathbb{N}, \oplus)$.*

Definizione 2.13. Dato un gioco G definiamo il *Groundy value* $\mathcal{G}(G) = m$ come l'unico intero $m \in \mathbb{N}$ per cui $G = *m$.

Il risultato che abbiamo dimostrato ora ci dà un modo preciso per studiare un sistema di regole Γ in normal play, conoscendo il Groundy value di "posizioni elementari" in cui si possono scomporre i giochi di Γ.

Vediamo ora alcuni risultati relativi aalla classe dei giochi ottali.

Definizione 2.14. Un *codice ottale* è una sequenza $0.d_1d_2\dots$ di cifre $0 \leq d_i < 8$.
Ogni codice ottale definisce un sistema di regole Γ, detto *gioco ottale*, giocato con certo numero di pile di elementi. Il codice specifica sotto quali condizioni possono essere rimossi elementi da una pila nel modo seguente: consideriamo la rappresentazione binaria di $d_k = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cdot 2 + \varepsilon_2 \cdot 4$, con $\varepsilon_i = 0, 1$, allora

- possiamo rimuovere un'intera pila di lunghezza k se e solo se $\varepsilon_0 = 1$,
- possiamo rimuovere k elementi dalla cima di una pila, lasciando almeno un elemento, se e solo se $\varepsilon_1 = 1$,
- possiamo rimuovere k elementi dal centro di una pila, lasciando almeno un elemento per parte, se e solo se $\varepsilon_2 = 1$.

Esempio 2.15.

- Nim è rappresentato dalla sequenza $0.333\dots$ dato che è possibile rimuovere qualunque numero di elementi dalla cima di una pila oppure l'intera pila, ma non è consentito separare una pila in due.
- Kayles è rappresentato da 0.77: è possibile rimuovere uno o due elementi da una pila, eventualmente separandola.
- Dawson's Kayles è rappresentato da 0.07: è possibile solamente rimuovere due elementi dal centro o dalla cima di una pila, eventualmente rimuovendola tutta.

Sia Γ un gioco ottale e indichiamo con H_n la posizione di Γ giocata su una pila di lunghezza n. Allora possiamo determinare facilmente l'outcome di ogni posizione di Γ una volta noto il valore di $\mathcal{G}(H_n)$ per ogni n, utilizzando il teorema di Sprague-Grundy.
Per alcuni giochi la situazione è ancora più maneggevole per il teorema di periodicità di Guy-Smith:

Teorema 2.16. ***(Guy-Smith)*** *Sia Γ un gioco ottale con codice $0.d_1d_2\dots$ con finite cifre non nulle e sia k il più grande intero per cui $d_k \neq 0$. Supponiamo esistano $n_0 \geq 0$, $p > 0$ per cui*

$$\mathcal{G}(H_{n+p}) = \mathcal{G}(H_n) \text{ per ogni } n \text{ con } n_0 \leq n < 2n_0 + p + k.$$

Allora $\mathcal{G}(H_n) = \mathcal{G}(H_{n+p})$ per ogni $n \geq n_0$.

Proof. Osserviamo subito che dopo una mossa su H_n abbiamo sempre $H_a + H_b$ con $n - k \leq a + b < n$ (eventualmente con a, b nulli).
Procediamo allora per induzione su n: il caso base con $n < 2n_0 + p + k$ è noto

per ipotesi. Supponiamo quindi $n \geq 2n_0 + p + k$: muovendo da H_{n+p} otteniamo $H_a + H_b$ con $a + b \geq n + p - k \geq 2n_0 + 2p$. Senza perdere di generalità possiamo allora supporre che $b \geq n_0 + p$. Per ipotesi induttiva allora $\mathcal{G}(H_{b-p}) = \mathcal{G}(H_b)$ e quindi

$$\mathcal{G}(H_a + H_b) = \mathcal{G}(H_a) \oplus \mathcal{G}(H_b) = \mathcal{G}(H_a) \oplus \mathcal{G}(H_{b-p}) = \mathcal{G}(H_a + H_{b-p}).$$

Ora le opzioni $H_a + H_b$ di H_{n+p} sono in bigezione con le opzioni $H_a + H_{b-p}$ di H_n e hanno gli stessi valori, dunque per la mex rule abbiamo $\mathcal{G}(H_{n+p}) = \mathcal{G}(H_n)$. $\square$

I valori più piccoli di p e n_0 per cui valgono le ipotesi del teorema sono detti rispettivamente *periodo* e *antiperiodo* di Γ.
Per giochi che rispettano una tale periodicità è allora sufficiente calcolare il valore di H_n solo per finiti n.

Esempio 2.17. Kayles e Dawson's Kayles sono giochi periodici, con periodo rispettivamente 12 e 34.
Calcoliamo invece brevemente i Grundy values del gioco **0.23**: vediamo subito che H_0 e H_1 non hanno opzioni, per cui $\mathcal{G}(H_0) = \mathcal{G}(H_1) = 0$. Invece per $n \geq 2$ vale che $H_n = \{H_{n-1}, H_{n-2}\}$ dunque $\mathcal{G}(H_n) = \text{mex}(\mathcal{G}(H_{n-2}, \mathcal{G}_{n-1})$, da cui

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\mathcal{G}$	0	0	1	2	0	1	2	0	1	...

Vediamo quindi facilmente che le ipotesi del teorema di periodicità sono soddisfatte, dunque **0.23** è periodico con periodo 2 e antiperiodo 1.

Teorema 2.18. ***(Flammenkamp, 2002)*** *Il gioco ottale* 0.106 *è periodico, di periodo* 328, 226, 140, 474 *e antiperiodo* 465, 384, 263, 797*. È il gioco con periodo più grande noto.*

Problema aperto 2.19. Esistono giochi ottali con codice finito che siano aperiodici?

3 Misère play

Vediamo ora i problemi che emergono invece nello studio dei giochi misère. Nonostante la teoria generale sia difficile da trattare, in alcuni casi è comunque possibile adattare, anche se in modo limitato, una parte della teoria in normal play.

Definizione 3.1. In modo analogo a prima possiamo definire l'uguaglianza tra giochi in misère play: diremo che $G = H$ se e solo se $o^-(G + X) = o^-(H + X)$ per ogni altro gioco X.

Vediamo subito alcuni risultati sull'uguaglianza in misère play:

Proposizione 3.2. $* + * = 0$.

Proof. Banalmente vediamo che $o^-(*+*) = \mathscr{N}$ e $o^-(*+*+*) = \mathscr{P}$. Procediamo quindi per induzione sull'altezza dell'albero di un gioco X:

- se $o^-(X) = \mathscr{N}$, il primo giocatore muove su X in una $\mathscr{P}$-position X' e per ipotesi induttiva $o^-(* + * + X') = \mathscr{P}$;
- se $o^-(X) = \mathscr{P}$, il primo giocatore può muovere solo in $* + * + X'$ con X' una $\mathscr{N}$-position di X, oppure in $* + X$. In quest'ultimo caso il secondo giocatore vince muovendo in X.

$\square$

Proposizione 3.3. $*2 + *2 \neq 0$.

Proof. Dall'albero associato vediamo che $o^-(*2 + *2) = \mathscr{P}$,

$$\begin{tikzcd}
 & *2 + *2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
*2 + 0 \arrow[d] & & *2 + * \arrow[d] \\
* + 0 & & * + 0
\end{tikzcd}$$

infatti qualunque mossa faccia il primo giocatore, il secondo può sempre rispondere spostando su una $\mathscr{P}$-position.
Abbiamo quindi una prima differenza con quanto accade in normal play, in cui $G + G = 0$ per ogni G. $\square$

Proposizione 3.4. *Sia $G = \{*2\}$, allora $G \neq *m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.*

Proof. Poiché l'unica opzione di G è $*2$ si vede subito che $o^-(G) = \mathscr{P}$, escludiamo subito la possibilità che $G = *m$ per $m \neq 1$.
Verifichiamo quindi che $G \neq *$. Vediamo che il primo giocatore ha una strategia vincente per $G + *$: infatti ha come opzione G, che è una $\mathscr{P}$-position, dunque $o^-(G + *) = \mathscr{N}$.
Vediamo invece che $o^-(G + G) = \mathscr{P}$: l'unica mossa disponibile per il primo giocatore è muovere in $*2 + G$, a questo punto il secondo giocatore può scegliere come opzione $*2 + *2$, che abbiamo già visto essere una $\mathscr{P}$-position. Segue allora che $G \neq *$. $\square$

Al contrario della normal play vediamo quindi che ci sono giochi che non sono uguali a nessuna pila di Nim. È addirittura possibile mostrare che G non è uguale a nessuma somma di pile di Nim.
Dall'analisi che abbiamo fatto precedentemente sappiamo che a meno di uguaglianza, i giochi con $\mathrm{b}(G) \leq n$ in normal play sono solo $n + 1$. Si può dimostrare invece che in misère play vi sono 41780 giochi già per $n = 5$, mentre per $n = 6$ sono più di $2^{4171779}$. Questo dà un'idea di come la teoria dei giochi misère modulo uguaglianza sia estremamente complicata e poco gestibile.
L'idea che sta dietro alla nozione di uguaglianza è di identificare due giochi se

si comportano allo stesso modo come addendi di una somma qualunque. In misère play questa richiesta è eccessivamente stretta e porta ad avere classi di equivalenza troppo piccole. Quello che è possibile fare allora se si vuole studiare un sistema di regole Γ è considererare unicamente come le posizioni che effettivamente compaiono in Γ interagiscano tra loro.

Definizione 3.5. Un insieme di giochi $\mathcal{A}$ si dice *chiuso* se è chiuso per somma e se per ogni $G \in \mathcal{A}$, per ogni opzione G' di G si ha $G' \in \mathcal{A}$.
Notiamo che se $\mathcal{A} \neq \emptyset$ è chiuso allora $0 \in \mathcal{A}$, poiché 0 compare come subopzione di qualunque gioco. Dunque $\mathcal{A}$ è un monoide commutativo.

Esempio 3.6. L'insieme delle posizioni di un gioco ottale è sempre chiuso.

Definizione 3.7. Sia $\mathcal{A}$ un insieme di giochi chiuso. Allora per $G, H \in \mathcal{A}$ poniamo

$$G \equiv_{\mathcal{A}} H \iff o^-(G+X) = o^-(H+X) \text{ per ogni } X \in \mathcal{A}.$$

La relazione di equivalenza che otteniamo in questo modo è più grossolana dell'uguaglianza, ma spesso è più facile da gestire.
Osserviamo che il quoziente $\mathcal{Q} = \mathcal{A}/\equiv_{\mathcal{A}}$ è anch'esso un monoide commutativo, con identità data dalla classe di 0. Inoltre la proiezione al quoziente $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{Q}$ è un morfismo di monoidi.

Definizione 3.8. Sia $\mathcal{P} = \{\Phi(G) \mid G \in \mathcal{A},\ o^-(G) = \mathscr{P}\}$. La coppia $(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ è detta *quoziente misère* di $\mathcal{A}$, che indichiamo con $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$.

Osservazione 3.9. L'analoga definizione nel caso dei giochi in normal play non ci dà informazioni diverse che quelle ottenute nella sezione precedente. Infatti se $G \neq H$ sono due giochi in qualche famiglia di giochi chiusa $\mathcal{A}$, allora abbiamo che $o^+(G+G) = \mathscr{P}$ mentre $o^+(G+H) = \mathscr{N}$, dunque G e H sono in classi di equivalenza distinte modulo $\equiv_{\mathcal{A}}$.
In particolare la stessa costruzione in normal play ci restituisce esattamente il sottogruppo di $(\mathbb{N}, \oplus)$ dato dalla proiezione al quoziente di $\mathcal{A}$.

Definizione 3.10. Sia $\mathcal{A}$ un qualunque insieme di giochi imparziali. Definiamo

- $\mathrm{hcl}(\mathcal{A})$ come l'insieme delle sottoposizioni di tutti i giochi di $\mathcal{A}$,
- $\mathrm{cl}(\mathcal{A})$ come la chiusura per somma di $\mathrm{hcl}(\mathcal{A})$.

Sia Γ un sistema di regole e $\mathcal{A}$ l'insieme di tutte le sue posizioni. Indichiamo con $\mathcal{Q}(\Gamma) = \mathcal{Q}(\mathrm{cl}(\mathcal{A}))$ il *quoziente pieno* per Γ.
Se Γ è un gioco ottale, denotiamo con $\mathcal{Q}_n(\Gamma) = \mathcal{Q}(\mathrm{cl}(H_0, \ldots, H_n))$ l'*n-esimo quoziente parziale* per Γ.

Supponiamo ora di conoscere $\mathcal{Q}(\Gamma)$ per qualche gioco ottale Γ e $\Phi(H_n)$ per ogni n. Allora ogni posizione di Γ è della forma $G = H_{n_1} + \cdots + H_{n_k}$, quindi per determinare $o^-(G)$ è sufficiente calcolare $\Phi(G) = \Phi(H_{n_1}) \ldots \Phi(H_{n_k})$ e controllare se $\Phi(G) \in \mathcal{P}$. In particolare se $\mathcal{Q}(\Gamma)$ è finito, abbiamo ridotto il problema all'eseguire k moltiplicazioni in un monoide finito.

Esempio 3.11. Calcoliamo ora il alcuni quozienti parziali non banale per Nim, che indicheremo con $\mathcal{T}_n = \mathcal{Q}(\mathrm{cl}(H_0, \ldots, H_{2^{n-1}}))$.

- $\mathcal{T}_0 = \{1\}$, in quanto abbiamo solo il gioco 0,
- $T_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, in quanto il giocatore vincente in una somma di k giochi $*$ dipende unicamente dalla partità di k.

Il primo quoziente interessante è $\mathcal{T}_2 = \mathcal{Q}(\mathcal{A})$, dove $\mathcal{A} = \{n * + m * 2 \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Chiaramente $\mathcal{A}$ è generato come monoide da $*$ e da $*2$, dunque se indichiamo $a = \Phi(*)$, $b = \Phi(*2)$ allora T_2 è generato da $\{a, b\}$.

Lemma 3.12. *Per $n \geq 1$ si ha che $n * 2$ è una $\mathscr{P}$-position se e solo se n è pari.*

Proof. Abbiamo già visto i casi $n = 1, 2$. In generale se n è pari abbiamo a seguente situazione:

$$\begin{tikzcd}
 & n * 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(n-1) * 2 \arrow[d] & & (n-1) * 2 + * \arrow[d] \\
(n-2) * 2 & & (n-2) * 2 + * + *
\end{tikzcd}$$

dunque a prescidere dalla mossa del primo giocatore, il secondo riesce a muovere su $(n-2) * 2 = (n-2) * 2 + * + *$ e concludiamo per ipotesi induttiva.
Se invece n è dispari, il primo giocatore vince muovendo su $(n-1) * 2$. □

Lemma 3.13. *Per $n \geq 1$ si ha che $n * 2 + *$ è sempre una $\mathscr{N}$-position.*

Proof. Se $n = 1$ allora la mossa vincente è muovere su $0 + *$.
Se n è pari abbiamo come opzione $n * 2$ che sappiamo essere una $\mathscr{P}$-position.
Se $n \geq 3$ è dispari abbiamo come opzione $(n-1) * 2 + * + * = (n-1) * 2$ che di nuovo è una $\mathscr{P}$-position. □

Corollario 3.14. *Siano $G = m * + n * 2$ e $H = m' * + n' * 2$, con $n, n' \geq 1$ e $(m, n) \equiv (m', n') \bmod 2$ allora $[G] = [H] \in \mathcal{T}_2$.*

Proposizione 3.15. $\mathcal{T}_2 = \langle a, b \mid a^2 = 1, b^3 = b \rangle$.

Proof. Osserviamo subito che dal corollario segue che vi sono al più sei elementi in $\mathcal{T}_2$:

$\mathcal{A}$	$[0]$	$[*]$	$[*2]$	$[*2 + *]$	$[*2 + *2]$	$[*2 + *2 + *]$
$\mathcal{T}_2$	1	a	b	ab	b^2	ab^2
o^-	$\mathscr{N}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{N}$

e che abbiamo già dimostrato le relazioni $a^2 = 1$ e $b^3 = b$.
È facile ora convincersi che queste sono tutte classi distinte. □

Osserviamo che le posizioni di Nim in $\mathcal{A}$ diverse da 0 e $*$ hanno gli stessi outcome sia in normal play che in misère play. Inoltre gli elementi $\{b, ab, b^2, ab^2\} \subseteq \mathcal{T}_2$ formano un sottogruppo $\mathcal{K}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, con identità data da $[*2 + *2]$: $\mathcal{K}_2$ è esattamente il sottogruppo di $(\mathbb{N}, \oplus)$ formato dalle stesse posizioni di Nim in normal play.

Andiamo ora a dimostrare un teorema di periodicità, analogo a quello già dimostrato in normal play, utile per determinare $\mathcal{Q}(\Gamma)$ in alcuni casi.
Per arrivare a questo, vediamo in primo luogo come si modifica un quoziente misère introducendo un nuovo elemento nella famiglia di giochi.

Lemma 3.16. *Sia $\mathcal{A}$ un insieme chiuso di giochi e G un gioco le cui opzioni sono in $\mathcal{A}$. Supponiamo che per qualche $H \in \mathcal{A}$ si abbia*

$$\{\Phi(G') \mid G' \textit{ opzione di } G\} = \{\Phi(H') \mid H' \textit{ opzione di } H\}.$$

Allora $\mathcal{Q}(\mathrm{cl}(\mathcal{A} \cup \{G\})) = \mathcal{Q}(A)$ e $\Phi(G) = \Phi(H)$.

Proof. In primo luogo mostriamo che $o^-(G+X) = o^-(H+X)$ per ogni $X \in \mathcal{A}$ per induzione su $\mathrm{b}(X)$: per $X = 0$ è chiaro, per l'ipotesi le opzioni di G e H hanno gli stessi outcome.
Osserviamo poi che

$$G + X = \{G' + X \mid G' \text{ opzione di } G\} \cup \{G + X' \mid X' \text{ opzione di } X\}$$

$$H + X = \{H' + X \mid H' \text{ opzione di } H\} \cup \{H + X' \mid X' \text{ opzione di } X\}.$$

Sappiamo ora che gli outcome dei $G' + X$ e $H' + X$ sono i soliti, e per ipotesi induttiva $o^-(G + X') = o^-(H + X')$, dunque $o^-(G + X) = o^-(H + X)$.

Dimostriamo quindi invece che $o^-((n+1)G + X) = o^-(H + nG + X)$ per ogni n e $X \in \mathcal{A}$ per induzione su $n \geq 0$ e $m = \mathrm{b}(X)$.
Fissiamo $n > 0$ e procediamo per induzione su m:

$$(n+1)G + X = \{nG + G' + X\} \cup \{(n+1)G + X'\}$$

$$H + nG + X = \{H + (n-1)G + G' + X\} \cup \{H + nG + X'\} \cup \{H' + nG + X\}$$

Per induzione su n, gli outcome di $\{nG+(G'+X)\}$ sono quelli di $\{H+(n-1)G+(G'+X)\} \cup \{nG+(H'+X)\}$. Per induzione su m gli outcome di $\{(n+1)G+X'\}$ sono quelli di $\{H + nG + X'\}$.
Poiché ogni gioco di $\mathrm{cl}(\mathcal{A} \cup \{G\})$ è della forma $X + nG$, con $X \in \mathcal{A}$, segue che $\Phi(G) = \Phi(H) \in \mathcal{Q}(\mathrm{cl}(\mathcal{A} \cup \{G\})) = \mathcal{Q}(A)$. □

Teorema 3.17. *Sia Γ un gioco ottale con codice finito di lunghezza k. Supponiamo che per qualche $n_0, p > 0$ si abbia $\Phi_M(H_{n+p}) = \Phi_M(H_n)$ per $n_0 \leq n \leq 2n_0 + p + k$, dove $M = 2n_0 + 2p + k$. Allora*

- *$\mathcal{Q}(\Gamma) \cong \mathcal{Q}_M(\Gamma)$ e*

- $\Phi(H_n + p) = \Phi(H_n)$ *per ogni* $n \geq n_0$.

Proof. Dimostriamo per induzione su $j \geq 0$ che $\mathcal{Q}(\mathcal{A}_{M+j}) = \mathcal{Q}(A_M)$ e che per $n_0 \leq n < M + j - p$ si ha $\Phi_{M+j}(H_n) = \Phi_{M+j}(H_{n+p})$.
Il caso $j = 0$ è l'ipotesi data. Sia quindi $j > 0$, osserviamo che le opzioni di H_{M+j} sono tutte della forma $H_a + H_b$ con $M + j - k \geq a + b < M + j$. Poiché $M + j - k > 2n_0 + 2p$, senza perdere di generalità possiamo assumere che $a \geq n_0 + p$, dunque per ipotesi induttiva vale che $\Phi_{M+j-1}(H_a) = \Phi_{M+j-1}(H_{a-p})$. Abbiamo allora che

$$\{\Phi_{M+j-1}(H_a + H_b)\} = \{\Phi_{M+j-1}(H_{a-p} + H_b)\}$$

ovvero che le opzioni di H_{M+j} e H_{M+j-p} hanno gli stessi valori tramite Φ_{M+j-1}. Dal lemma segue quindi che

$$\mathcal{Q}(\mathcal{A}_{M+j}) = \mathcal{Q}(A_{M+j-1})$$

$$\Phi_{M+j}(H_{M+j}) = \Phi_{M+j}(M + j - p)$$

. $\square$

Esempio 3.18. È possibile dimostrare, ad esempio utilizzando il programma *MisèreSolver* di A. Siegel, che il quoziente pieno di Kayles ha ordine 40 e che

$$\Phi(H_{n+12}) = \Phi(H_n) \text{ per } n \geq 71.$$

Esempio 3.19. Riprendendo l'esempio del gioco ottale 0.23 è possibile verificare che $\mathcal{Q}_n \cong \mathcal{T}_2 = \langle a, b \mid a^2 = 1, b^3 = b \rangle$ per $3 \leq n \leq \infty$ e che il gioco soddisfa la stessa periodicità del caso normal play:

$\mathcal{A}$	H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8	$\ldots$
$\mathcal{Q}$	1	1	a	b	1	a	b	1	a	$\ldots$

4 Normal play vs Misère play

Ricordiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ indichiamo il 2^n-esimo quoziente parziale di Nim con

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{Q}(*, \ldots, *2^{n-1}),$$

e il quoziente pieno di Nim con $\mathcal{T}_\infty$.
Si dimostra che

- $|\mathcal{T}_0| = 1$,
- $|\mathcal{T}_1| = 2$,
- $|\mathcal{T}_n| = 2^n + 2$ per ogni $n \geq 2$.

Inoltre è possibile calcolare una presentazione di questi monoidi:

$$\mathcal{T}_n = \langle a, b_1, \ldots, b_n \mid a^2 = 1, b_i^3 = b_i, b_i^2 = b_j^2 \rangle$$

per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dove $a = [*]$ e $b_i = [*2^i]$.
Inoltre se $n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i 2^i$ allora

$$\Phi(*n) = a^{\varepsilon_0} b_1^{\varepsilon_1} \ldots b_k^{\varepsilon_k}.$$

Teorema 4.1. *Per ogni* $2 \leq n \leq \{\infty\}$ *si ha*

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{K}_n \cup \{1, a\}$$

dove $\mathcal{K}_n$ *è un sottogruppo isomorfo a* $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*.*
$\mathcal{K}_n$ *è detto* kernel *del monoide, e corrisponde alle posizioni di Nim in misère play che si comportano esattamente come in normal play.*

Definizione 4.2. Un insieme di giochi $\mathcal{A}$ è detto *tame* se si ha $\mathcal{Q}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{T}_n$ per qualche $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, altrimenti è detto *wild*.

La definizione si estende ai sistemi di regole: Γ è detto essere rispettivamente *tame* o *wild* a seconda se lo è l'insieme delle sue posizioni di gioco.

Esempio 4.3. Non tutti i giochi sono tame, ad esempio si può vedere che il gioco ottale **0.75** ha come quoziente $\mathcal{R}_8 = \{1, a, b, ab, z, az, t, at\}$, che non è tame.
Inoltre $\mathcal{R}_8$ è stato dimostrato essere il più piccolo quoziente misère non tame e l'unico quoziente di ordine 8.

Andiamo ora a vedere la definizione generale di kernel di un monoide, e come questo leghi le modalità di gioco normal play e misère.

Definizione 4.4. D'ora in poi sia $\mathcal{Q}$ un monoide commutativo finito. Introduciamo alcune definizioni:

- $x|y$, x *divide* y se esiste $z \in \mathcal{Q}$ per cui $xz = y$;
- x e y sono *mutualmente divisibili* (m.d.) se $x|y$ e $y|x$;
- $x \in \mathcal{Q}$ è *idempotente* se $x^2 = x$

È immediato verificare che la mutua divisibilità è una relazione di equivalenza su $\mathcal{Q}$ e che la classe m.d. di un idempotente x è un gruppo con identità x.
Siano ora $z_1, \ldots, z_k$ gli idempotenti di $\mathcal{Q}$. Allora $z = z_1 \cdot \dots \cdot z_k$ è a sua volta un idempotente. Indichiamo con $\mathcal{K}$ la classe di mutua divisibilità di z, detto *kernel* di Q.

Teorema 4.5. *La mappa* $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{K}$ *data da* $x \longmapsto zx$ *è un morfismo moltiplicativo surgettivo.*

Proof. Mostriamo che $zx \in \mathcal{K}$: chiaramente $z|zx$, inoltre poiché $\mathcal{Q}$ è finito, le potenze di x non sono tutte distinte, dunque esistono $n, k > 0$ per cui $x^n = x^{n+k}$. Di conseguenza $x^n = x^{n+tk}$ per ogni $t \geq 0$. Sia quindi $n \leq r < n + k$ multiplo di k, quindi $r = tk$, allora

$$x^{2r} = x^{r+tk} = x^n x^{tk} x^{r-n} = x^n x^{r-n} = x^r.$$

Dunque x^r è idempotente, perciò $zx^r|z$ e quindi $zx|z$, ovvero $zx \in \mathcal{K}$.
È immediato allora dalle definizioni che la mappa sia moltiplicativa e surgettiva. □

Definizione 4.6. Un quoziente misère finito $(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ è detto *normale* se

$$\mathcal{K} \cap \mathcal{P} = \{z\}.$$

Fatto 4.7. *Il più piccolo quoziente conosciuto* anormale *ha ordine* 420.

Definizione 4.8. Dato un insieme chiuso di giochi $\mathcal{A}$, la proiezione al quoziente

$$\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{Q}$$

è detta essere *fedele* se

$$\Phi(G) = \Phi(H) \Longrightarrow \mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \text{ per ogni } G, H \in \mathcal{A}.$$

Problema aperto 4.9. È vero che ogni proiezione Φ di un quoziente misère è fedele?

Teorema 4.10. *Se* $(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ *è normale e* Φ *è fedele allora per ogni* $G, H \in \mathcal{A}$

$$z\Phi(G) = z\Phi(H) \iff \mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H).$$

Questo ci dice quindi che c'è una bigezione tra gli elementi di $\mathcal{K}$ e i Groundy values in normal play per giochi in $\mathcal{A}$.
Abbiamo dunque una "strategia generale" per giocare un gioco misère Γ: è sufficiente giocare le posizioni come se stessimo giocando Γ in normal play, a meno che muovendo non si esca da $\mathcal{K}$. A questo punto è necessario studiare nel dettaglio la struttura di $\mathcal{Q}$.

Bibliografia

References

[1] *Misère Games and Misère Quotients* A. Siegel, 2006

[2] *Combinatorial Game Theory* A. Siegel, 2013

[3] *Advances in losing* T. Plambeck, 2006

[4] *Sprague-Grundy values of octal games* A. Flammenkamp, 2002